TÉCNICAS DE CONTAR

- Se trata de contar el número de elementos que tiene un conjunto.
- Las técnicas de recuento se utilizan, por ejemplo, para determinar la complejidad de un algoritmo.
- Un algoritmo de enumeración describe uno tras otro los elementos de un conjunto

- Al estudiar ciertos problemas aparecen conjuntos cuyo cardinal es muy grande, por lo que resulta imposible representarlos de forma explícita en el ordenador.

Ejemplo:

P_n es el conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, ..., n\}$.

El cardinal de P_{100} es $100! = 9.332621544 \,.\, 10^{157}$

mientras que el Big-Bang ocurrió hace

$4.5 \,.\, 10^{17}$ segundos $= 1.426940639 \,.\, 10^{10}$ años.

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

1. Principio de Dirichlet (1805 –1859)

Principio de las cajas o Principio del palomar

Si tenemos k objetos para distribuir en n cajas con $\boxed{k > n}$

entonces al menos una de las cajas tiene dos objetos.

Ejemplos

1) ¿De cuántas formas distintas pueden introducirse k palomas en un palomar con n nichos, $k > n$, de manera que a lo sumo haya una paloma en cada nicho?

2) En un conjunto de más de 366 personas, al menos dos han nacido el mismo día del mismo mes.

3) En la Comunidad de Madrid, al menos dos personas tienen el mismo número de cabellos en la cabeza.

(densidad capilar máxima de 5 cabellos/mm^2).

4) Si tiramos dos dados doce veces, al menos en dos de esas tiradas obtendremos la misma suma de puntuaciones.

5) En un conjunto de personas A existen al menos dos personas con el mismo número de amigos en A.

Demostración.- Sea card A $= k$ y $f: \mathrm{A} \to \mathrm{N}$

El nº de amigos que tiene a en A, distintos de él mismo, es

$$f(a) \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$$

Si $f(a) = 0$, entonces a no tiene amigos en A, por lo tanto, nadie puede tener $k-1$ amigos en A, es decir, no existe b en A con $f(b) = k-1$.

Luego, card $f(\mathrm{A}) \leq k - 1$, por lo que f no es inyectiva y existen dos personas con el mismo número de amigos en A.

2. Principio de la Suma

Si A y B son dos conjuntos finitos, no vacíos, disjuntos,

entonces $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$

- **Principio de Dirichlet generalizado**

Tenemos m objetos para distribuir en n cajas con $m = n\,q + r$,

$0 \leq r < n$, entonces

hay una caja que contiene al menos $\lceil m/n \rceil$ objetos

hay otra caja que contiene a lo sumo $\lfloor m/n \rfloor$ objetos

$$q = \lfloor m/n \rfloor < m/n < \lceil m/n \rceil = q + 1$$

Ejemplos

1) En un conjunto de 100 personas, ¿cuántas han nacido el mismo mes?

2) Un cajón contiene 10 camisetas rojas y 10 azules, ¿cuántas camisetas hay que sacar al azar, como mínimo, para asegurar
   a) que al menos tres sean del mismo color?
   b) que al menos tres sean azules?

Soluciones

1) $m = 100$ personas $n = 12$ meses

hay un mes en el que han nacido al menos

$$\lceil m/n \rceil = \lceil 100/12 \rceil = 9 \text{ personas}$$

hay un mes en el que han nacido a lo más

$$\lfloor m/n \rfloor = \lfloor 100/12 \rfloor = 8 \text{ personas}$$

2)

a) m = nº de camisetas del mismo color

n = 2 colores

Hay una selección que contiene al menos

$$\lceil m/2 \rceil = 3 \text{ camisetas} \quad \rightarrow m = 5$$

b) En el peor caso, seleccionamos 10 camisetas rojas

y 3 azules, luego hay que sacar 13 camisetas al azar .

3) Teoría de Ramsey En un conjunto de 6 personas hay tres mutuamente conocidas o tres mutuamente desconocidas.

Demostración.- Sean α una persona fija

A = { personas que se conocen con α }

B = { personas que no se conocen con α }

m = 5 personas n = 2 conjuntos

Un conjunto contiene al menos $\lceil m / n \rceil = 3$ personas

Un conjunto contiene a lo más $\lfloor m / n \rfloor = 2$ personas

Sea $A = \{ \beta, \gamma, \delta \}$, puede ocurrir que

- No se conocen dos a dos,

  entonces $\{ \beta, \gamma, \delta \}$ es una terna de desconocidos.
- Se conocen dos de ellos, β y γ,

  entonces $\{ \alpha, \beta, \gamma \}$ es una terna de conocidos.
- Se conocen los tres,

  entonces $\{ \beta, \gamma, \delta \}$ es una terna de conocidos.

3. Principio del Producto

Si A y B son dos conjuntos finitos y no vacíos,

entonces $\text{card}\,(A \times B) = \text{card}\,A \times \text{card}\,B$

Ejemplos

1) ¿Cuántos $n \in N$ con 4 cifras no contienen al cero?

2) ¿Cuántos $n \in N$ con 4 cifras tienen un único 8 ?

3) ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A = \{ a, b, c \}$?

4) En una clase hay 32 chicos y cada uno conoce a 5 chicas de la clase. Si cada chica conoce a 8 chicos de la clase, ¿cuántas chicas hay?

Soluciones

1) 9^4 números con 4 cifras no contienen al cero.

2) $9^3 + 3.\,8.\,9^2$ números con 4 cifras tienen un único 8.

3) Representamos cada subconjunto por una terna de ceros y unos de forma que 1 indica que el elemento pertenece al conjunto y 0 que el elemento no pertenece al conjunto.

Si $B = \{0, 1\}$, el número de subconjuntos de A es

$\text{card}(B \times B \times B) = \text{card } B^3 = 2^3 = 8.$

4) Hay $32 \,.\, 5 / 8 = 20$ chicas.

4. Principio del Complementario

Si A y B son dos conjuntos finitos y $B \subset A$, entonces

$$\text{card}\,(A - B) = \text{card}\, A - \text{card}\, B$$

Ejemplos

1) ¿Cuántos $n \in \mathbb{N}$, $n < 1000$, contienen la cifra cero?

2) De una baraja de 40 cartas, se eligen ordenadamente 4 cartas con reemplazamiento,

a) ¿Cuántas veces se repite alguna carta?

b) ¿Cuántas veces se repite la cuarta carta, pero no es necesariamente la primera repetición?

Solución

a) Nº de formas distintas de sacar las cuatro cartas $\rightarrow$ 40^4

Si ninguna carta se repite $\rightarrow$ 40. 39. 38. 37

Por tanto, se repite alguna carta en

$$40^4 - 40.\ 39.\ 38.\ 37 = 366640 \text{ ocasiones.}$$

b) Nº de veces que la cuarta carta no se repite $\rightarrow$ 39. 39. 39. 40

(se elige la cuarta carta de 40 formas y luego las otras tres cartas distintas de la cuarta)

Por tanto, la cuarta carta se repite en

$$40^4 - 40.\ 39^3 = 187240 \text{ ocasiones.}$$